Analiza zespolona
Lista 3

Zad 1. Wykazać, że przy „funkcji liniowej”, to jest przy przekształceniu postaci $f(z) = az + b$, $a \neq 0$,

a) okrąg przechodzi na okrąg,

b) para prostych równoległych na parę prostych równoległych,

c) stosunek podziału $(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$ zachowuje się,

d) zachowują się kąty między krzywymi.

Zad 2. Znaleźć „funkcję liniową” przekształcającą trójkąt o wierzchołkach 0, 1, i na trójkąt o wierzchołkach 0, 2, $1 + i$.

Zad 3. Przy odwzorowaniu $f(z) = \frac{1}{z}$ wyznacz obraz zbioru

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 3\}, \qquad C = \{z(t) = t + \frac{1}{2}i, t \in \mathbb{R}\},$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2,\ arg(z) \in [0, \pi)\}, \qquad E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\},$$

F - zbiór będący hiperbolą o równaniu $x^2 - y^2 = 1$.

Zad 4. Zbadaj na co przechodzi przy przekształceniu $f(z) = \frac{1}{z}$

a) rodzina okręgów $|z - a| = |a|, a \in \mathbb{R}$

b) rodzina prostych równoległych $y = x + b, b \in \mathbb{R}$

c) rodzina prostych $y = kx, k \in \mathbb{R}$

Zad 5. Przedstawić *homografię*, to jest odwzorowanie postaci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$, w postaci superpozycji „funkcji liniowych” i inwersji.

Zad 6. Wykazać, że homografie tworzą grupę przekształceń.

Zad 7. Dowieść, iż homografie przeprowadzają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

Zad 8. Wyznaczyć obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ przy odwzorowaniu homograficznym

$$f(z) = \frac{z - a}{z - \overline{a}}, \qquad \text{gdzie } \mathrm{Im}\, a > 0.$$

Zad 9. Wyznaczyć obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ przy odwzorowaniu homograficznym $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Zad 10. Znaleźć obraz zbioru $\{z : 0 < arg\, z < \frac{\pi}{2}\}$ przy odwzorowaniu homograficznym $f(z) = \frac{z}{z-1}$.